

MPA S2 algèbre 2014
Responsable : Christine Huyghe
Problème du 4 mars 2015. Durée : 2h.

Il sera accordé le plus grand soin à la qualité de la rédaction. Sont interdits : les documents, les téléphones portables, les baladeurs, et tout autre objet électronique (calculatrice, ...). Le barème noté n'est qu'indicatif. Vous pouvez admettre le résultat d'une question afin de traiter les questions suivantes.

1. **Exercice 1. Vrai/Faux.** Vous devez impérativement justifier votre réponse, si nécessaire par un contre-exemple.

- (a) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $F_1 = \{f \in E \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty\}$, F est un sous-espace vectoriel de E .
- (b) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $F_2 = \{f \in E \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0\}$, F_2 est un sous-espace vectoriel de E .
- (c) Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille libre de quatre vecteurs d'un espace vectoriel E . La famille $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ est libre.
- (d) Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Alors $A = 0$ ou $B = 0$.
- (e) Soient (e_1, e_2, e_3) une base d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E , et $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$, alors $E = F \oplus \mathbb{R}e_3$.

2. **Exercice 2.**

- (a) On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$. Soit A la matrice suivante à coefficients dans $\mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & j^2 \\ j & j^2 & 0 \\ 1 & -j^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système $AX = 0$ pour $X \in M_{3,1}(\mathbb{C})$ une matrice colonne.

- (b) Les vecteurs suivants de $\mathbb{C}^4$ forment-ils une famille libre ?

$$U = \begin{pmatrix} -1 \\ j^2 \\ -j^2 \\ 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} j^2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Exercice 3.

- (a) Soit $E_n = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$. Montrer que la famille $1, X, \dots, X^n$ forme une base de E_n comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.
- (b) Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ $n+1$ nombres complexes. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on note

$$P_i(X) = \frac{\prod_{k \neq i} (X - \alpha_k)}{\prod_{k \neq i} (\alpha_i - \alpha_k)}.$$

Ces polynômes s'appellent polynômes de Lagrange.

- i. Pour cette question, on prend $n = 2$, $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$. Calculer P_0 et P_1 dans ce cas, les valeurs de ces polynômes en 0 et 1 et montrer qu'ils forment une base de E_1 .
- ii. Pour cette question, on prend $n = 3$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = j$ et $\alpha_2 = j^2$.

A. Calculer les valeurs de P_0, P_1 et P_2 en $1, j, j^2$ et montrer que ces polynômes forment une base de E_2 . On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que

$$P_0(X) = \frac{X^2 + X + 1}{3}, P_1(X) = \frac{jX^2 + j^2X + 1}{3}, P_2(X) = \frac{j^2X^2 + jX + 1}{3}.$$

B. Soit $H = \{P \in E_2 \mid P(j^2) = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E_2 , et que $P \in H \Leftrightarrow (X - j^2) \mid P$.

C. Montrer que $1 - jX \in H$.

D. Montrer que $X - j^2 \in \text{Vect}(P_0, P_1)$.

- iii. Montrer que dans le cas général, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ forme une base de E_n .

- (c) Soient $n = 4$ et $F = \{P \in E_4 \mid P'(j) = 0\}$.

- i. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E_4 .
- ii. Soit D la droite vectorielle de E_4 engendrée par le polynôme X . Montrer que

$$E_4 = D \oplus F.$$

- iii. Calculer la décomposition des polynômes $1, X$ et X^2 suivant la somme directe $E_4 = D \oplus F$.
- iv. On reprend les polynômes de Lagrange P_0, P_1 et P_2 relatifs à $1, j, j^2$ de la question précédente Exercice 3(b)ii. Calculer la décomposition des polynômes P_0, P_1 et P_2 suivant la somme directe $E_4 = D \oplus F$.